「時間遅れを考慮した微分方程式の安定性解析とその応用」

神戸大学海事科学研究科　　　　　　上田　好寛

1　研究の背景と目的

本研究の目的は，過去の状況が現在の状況に影響を及ぼすことを考慮した「時間遅を考慮した微分方程式」や「遅延方程式」とよばれる微分方程式に対して，解の挙動を解析することである．微分方程式の解の挙動を調べ，どのような仮定の下で解が減衰するかを解析することを「安定性解析」とよぶ．

微分方程式を用いて様々な自然現象が記述できることからも，安定性解析が意義のある研究内容であることは明らかである．現在，多くの場面で活用されている微分方程式のほとんどは「現在の状況は過去の状況に依存しない」という前提のもとで組み立てられている．しかし，現実に現れる現象はそう単純ではなく，過去の状況が現在の状況に影響を及ぼすのを無視することはできない．車の運転を例に挙げると，前の車がブレーキを踏んだ瞬間に運転手はブレーキを踏むわけではなく，前の車がブレーキを踏んだのを確認してから行動に移す．実際，全体の車が前の車のスピードに合わせて同時にスピードを調整できれば渋滞現象は起こりえないが，ある程度の時間が経った後に行動を起こすような状況 (時間遅れを含んだ状況) を考慮することで渋滞現象が起こることが，様々な実験や研究により知られている．このように，現象が複雑化する一つの要因となっている時間遅れの影響を考慮に入れることで，より現実に則した数理モデルの提案と解析を行うことを本研究の大きな目的としている．

また，時間遅れを考慮した微分方程式は応用面において大変意義のある微分方程式であるにもかかわらず，解析の困難さから多くの重要な未解決問題が残っている．さらには，方程式を連立した方程式系に関しては研究結果が極めて少なく，今後の進展が重要視されている．よって，時間遅れを考慮した微分方程式系に着目して研究を進め，時間遅れの効果がどのように解に影響を及ぼすかについて，数学手法を用いて定量的かつ明示的に解析することが本研究の目標である．

2　研究方法・研究内容

本研究では，次の時間遅れを考慮した連立常微分方程式系について考察を行った．

$$u'(t) + Au(t) + Bu(t-\tau) + C\int_{t-\sigma}^{t} u(s)ds = 0. \tag{DDE}$$

ここで，時間変数 t は非負の実数値とし，$u = u(t)$ を未知の n 次ベクトル値関数，A, B, C は全ての成分が実数である n 次の正方行列，τ, σ は時間遅れを記述する正定数とする．また，$'$ は時間変数 t に関する微分を表す．方程式系 (DDE) の左辺第 3 項と第 4 項が時間遅れの効果を表しており，$Bu(t-\tau)$ を離散型時間遅れ，$C\int_{t-\sigma}^{t} u(s)ds$ を記憶型時間遅れとよぶ．

方程式系 (DDE) に対し，行列 B と C を零行列と定めた微分方程式

$$u'(t) + Au(t) = 0$$

は最も標準的な常微分方程式系であり，行列 A の固有値を調べることで解の挙動を解析できることが知られている．ここで，行列 A の固有値 λ は特性方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の根

であることに注意する (行列 I は単位行列，det は行列式を表す)．詳しくは，特性方程式の全ての固有値の実部が負である場合，方程式系の解が時間無限大で指数減衰することが導かれる．

これらの理論を方程式 (DDE) に拡張できることが，文献 [1] などにより既に知られている．方程式 (DDE) に対応する特性方程式が

$$\det\left(\lambda I + A + Be^{-\tau\lambda} + C\int_{-\sigma}^{0} e^{s\lambda}ds\right) = 0 \tag{CE}$$

と表され、(CE) の全ての根 (固有値) の実部が負となるとき，方程式系 (DDE) の解 u は時間無限大で指数減衰する．つまり，$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ が成り立つ．以上の考察により，特性方程式 (CE) の全ての固有値の実部が負となるための条件を導出することが，本研究の具体的な目的となる．

特性方程式 (CE) の根 λ の性質を求めることが本研究の鍵であるが，根 λ は一般的には複素数値であり解析が非常に困難である．実際，方程式 (DDE) が単独の方程式であり C が零行列の場合には Hayes[2] によって詳細な解析がなされているが，方程式が連立系の場合は特性方程式 (CE) が煩雑になるため従来の手法が適用できない．したがって，特性方程式 (CE) に対する新たな解析手法の確立が重要であり，その新たな手法が本研究の最大の特色である．

3　研究成果

本研究では，自身の指導学生である修士課程の桐侑也学生とともに，手始めとして既に得られている自身の結果 [4] の拡張に取り組んだ．論文 [4] では，2 本からなる連立方程式系を考察しており,「安定性条件」とよばれる解が指数減衰するために係数行列が満たすべき条件を導出している．そこで，論文 [4] で培われた背理法の技術を用いて，より多くの方程式が連立した方程式系の安定性条件を導出したのが論文 [5] である．論文 [5] では具体的に 3 本と 4 本からなる連立方程式系をそれぞれ解析しており，体系的な安定性条件の導出に成功している．しかしながら，研究を進めるにつれて論文 [5] で得られた結果が最良でない可能性が浮かび上がってきた．これはつまり，得られた安定性条件を満たさない係数行列に対しても，方程式系 (DDE) の解が指数減衰するということを示唆している．最良な条件でなくても具体的な物理モデルへの応用は十分に可能であるが，最良な条件を導出しておくことで偏微分方程式系などより複雑な方程式系に対する拡張が円滑に進むであろうと判断し，安定性条件の最良性について研究を行ったのが論文 [6] である．

論文 [6] では離散型の時間遅れのみを対象とし，方程式系 (DDE) で A を対角行列とし，C を零行列と仮定した方程式系の研究を行うことで，次の安定性条件の導入に成功した．

<u>安定性条件 **(SC)**</u>

- $\det(A+B) \neq 0$.
- $1 \leq j \leq n$ を満たす全ての整数 j に対して，$a_{jj} > |b_{jj}|$ もしくは $a_{jj} = b_{jj} > 0$ が成り立つ．
- $A - \tilde{B}$ の全ての主小行列式が非負．

ここで，a_{jk}, b_{jk} をそれぞれ行列 A, B の第 j 行第 k 列の成分とし，$\tilde{B}$ を $|b_{jk}|$ を第 j 行第 k 列の成分とする行列とする．この安定性条件 (SC) を基に安定性に関する次の定理が導かれる．

定理 1(論文 [6])

方程式系 (DDE) に対し，安定性条件 (SC) と特性方程式 (CE) の全ての固有値の実部が負となるとこは必要十分の関係となる．

定理 1 の意味する内容は，方程式系 (DDE) の係数が安定性条件 (SC) を満たせば解は指数減衰することが示され，その一方で，もし方程式系 (DDE) の解が時間減衰しなければ方程式系の係数行列は安定性条件を満たさないということである．これは，定理 1 によって最良な安定性条件が導かれたことを示唆している．また，定理 1 の特出すべき点は，安定性条件 (SC) は方程式系 (DDE) の係数行列 A, B にのみ与えられた条件であることである．これはつまり，具体的な物理モデルによって方程式系 (DDE) が与えられた際に，容易に安定性条件 (SC) を適用することができ，その結果，方程式系の解が指数減衰するか否かを即座に判断できることを述べている．これまでは，物理モデルに対して特性方程式 (CE) を個別に解析することで解の挙動を導いていたが，その手順を定理 1 により全て省くことが可能となったのである．定理 1 の証明は，背理法によるものの，論文 [4, 5] で用いた手法とは全く異なるものであり，線形代数学や複素関数論の基礎的な技術を精巧に組み合わせることで示される．

さらに，ここまでの研究内容がひとつの動機付けとなり，論文 [3] によって，同期現象や共鳴現象を記述する常微分方程式系である蔵本モデルに時間遅れを考慮した微分方程式系の数学解析も行った．本研究にあたって，本学術研究助成金を利用して共同研究者である National Taiwan University の Hsia 氏を招聘しており，1 週間に渡る議論の末に論文 [3] の本質的な部分が構築された．この論文で得られた手法や結果は，自身の解析手法が様々な物理モデルに適用可能であることを十分に示唆しており，今後のさらなる応用が期待される．

当初計画では，偏微分方程式系も視野に入れた研究を想定していたが，常微分方程式系においても複雑な状況を精査して解析する必要があり，より厳密な結果を得るために常微分方程式系に焦点を絞って研究を行った．その結果，論文 [6] の主定理 (定理 1) に見られるように最良の結果である必要十分条件が導かれることが判明し，充実した研究結果が得られたと考えている．またさらに，これら一連の結果を基礎として，論文 [3] のように様々な方程式系への広がりもみせており，偏微分方程式系への応用も今後の研究課題として視野に入れている．

4　生活や産業への貢献および波及効果

本研究は，時間遅れを考慮した微分方程式系に対する，数学理論に基づいた一般的な安定解析の枠組みの構築が主な目的である．そしてその一連の結果として，方程式系の解が安定となるために係数行列が満たすべき条件が導出された．よって，本研究の波及効果として，本研究結果の様々な数理モデルへの応用が第一に挙げられる．例えば，時間遅れを考慮することで生物が成人してから子供が産まれる成長過程を表現でき，個体数が時間経過とともにどのように変化するかを予測することができる．また，感染症モデルではウイ

ルスの潜伏期間を時間遅れの効果として表現でき，インフルエンザなどの流行の予測などにも応用が期待される．その他にも，Murray による文献 [7] でも，生物学に起因する数理モデルにおいて時間遅れを考慮した微分方程式を考察することの有用性が記載されている．またさらに，先述の通り，渋滞学においても時間遅れの効果の重要性が示唆されており，本研究内容が渋滞現象のメカニズムの解明に貢献することが期待される．よって，今後の進展として，各分野の専門家と交流を重ねることで，本研究結果の応用と専門分野での特徴を捉えた問題提起に挑む予定である．

参考文献

[1] Hale, J.K., Lunel, S.M.V.: Introduction to Functional Differential Equations. *Applied Mathematical Sciences* **99**, Springer-Verlag, New York (1993).

[2] Hayes, N.D.: Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation, *J. London Math. Soc.* **25** (1950), 226–232.

[3] Hsia, C.-H., Jung, C.-Y., Kwon, B., Ueda. Y.: Complete and partial synchronization of Kuramoto oscillators with the time-delayed interactions and frustration effect, preprint.

[4] Kiri, Y., Ueda, Y.: Stability condition for a system of delay-differential equations, to appear in Springer Proceedings in Mathematics and Statistics (the proceedings of Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems, 2018).

[5] Kiri, Y., Ueda, Y.: Stability analysis for a system of linear differential equations with discrete and distributed delay, preprint.

[6] Kiri, Y., Ueda, Y.: Stability criteria for a general system of linear differential equations with discrete delays, preprint.

[7] Murray, James D.: Mathematical Biology, I. An Introduction, 3rd edition, *Springer-Verlag New York* (2002).